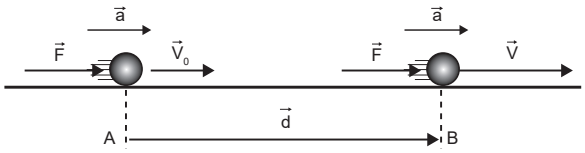
Aula 16

Energia

Teorema da energia cinética



O trabalho da força resultante em uma partícula é a variação de sua energia cinética

$$\tau_{total} = \Delta E_c = E_{c_{final}} - E_{c_{inicial}}$$

Energia cinética

Energia que depende do movimento de um corpo em relação a um certo referencial.

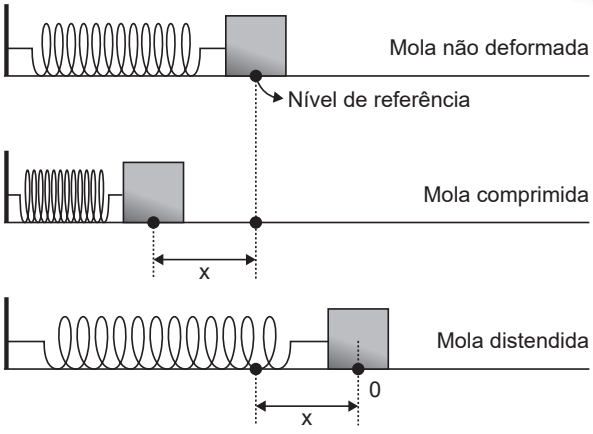
$$E_c = \frac{m\,v^2}{2}$$

Energia potencial gravitacional

A energia potencial gravitacional depende da posição do corpo em relação a um nível de referência.

$$E_p = m\,g\,h$$

Energia potencial elástica



$$E_e = \frac{K(\Delta x)^2}{2}$$

Energia mecânica

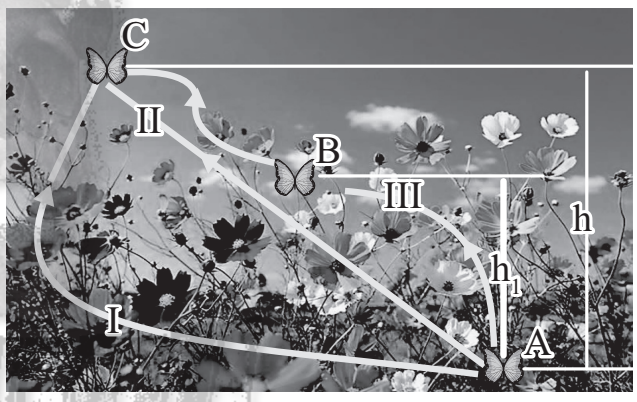
Energia mecânica (E_m) – é a energia total do sistema, ou seja, a soma das energias e onde energia cinética (E_c) com a energia potencial (E_p), sendo que esta pode ser energia potencial gravitacional ou energia potencial elástica, ou ambas.

$$E_m = E_c + E_p$$

Sistemas conservativos – São aqueles onde não ocorre dissipação de energia e onde a energia cinética (E_c) e a energia potencial (Ep) são variáveis, mas sua soma, que é a energia mecânica é constante (é sempre a mesma em cada ponto), desde que ele se mova sob ação de forças conservativas (força peso, elástica, elétrica etc.)

Em todo sistema conservativo a energia total (mecânica) permanece constante.

É importante lembrar que o trabalho das forças conservativas, como, por exemplo, as forças peso e potencial elásticas não dependem da trajetória, mas apenas das posições inicial e final da mesma.



Assim na figura anterior, o trabalho da força peso da borboleta, que é uma força conservativa é o mesmo na ida de A até B por qualquer uma das trajetórias I, II ou III.

O que você deve saber

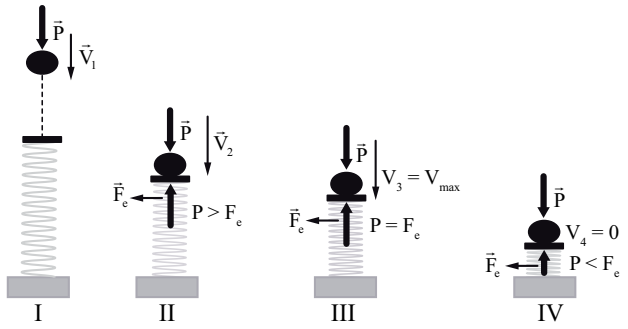
$$E_m = E_c + E_p$$

E_m – energia mecânica (J) – E_c – energia cinética (J) – E_p – energia potencial "gravitacional ou elástica" (J)

Em todo sistema conservativo a energia total (mecânica) permanece constante.

O trabalho das forças conservativas, como, por exemplo, as forças peso e potencial elástica não dependem da trajetória, mas apenas das posições inicial e final da mesma.

Características do movimento de uma esfera em queda livre que atinge uma mola, deformando-a, até que a esfera pare.



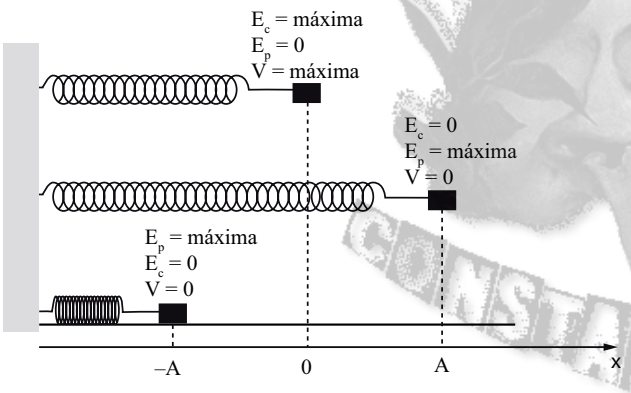
I. a esfera é abandonada do repouso ($V_0 = 0$) e cai sujeita apenas à força peso, com velocidade de intensidade V_1, que vai aumentando devido apenas à aceleração da gravidade, até atingir a mola;

II. ao atingir a mola, começando a comprimi-la, surge a força elástica ($\vec{F}_2$) (que se opõe ao peso ($\vec{P}$) .
A intensidade de $\vec{F}_2$ vai aumentando, diminuindo a intensidade da força resultante que é para baixo, fazendo com que V_2 aumente cada vez menos, até chegar à situação III;

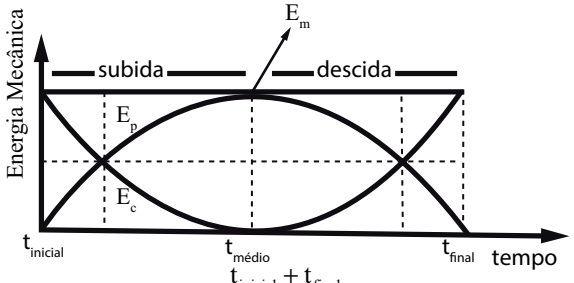
III. nesta situação as intensidades das forças elásticas e peso tornam-se iguais ($P = F_e$), quando a velocidade de queda torna-se máxima;

IV. entre III e IV,a velocidade da esfera vai diminuindo, pois F_e vai ficando cada vez maior que o peso, até que a esfera pare, com $V_4 = 0$, e toda a energia mecânica do início, que é a potencial gravitacional, se transforma em elástica.

- Um sistema massa-mola constitui um oscilador harmônico simples com amplitude (máxima deformação) A, de características:



A energia mecânica é sempre constante no MHS e vale $E_m = kA^2/2$ ou $E_m = E_c + E_p$ ou $E_m = kx^2/2 + m.v^2/2$
Nos extremos onde v = 0 e o módulo de x é A, temos que --- $E_m = E_c + E_p$ --- $E_m = 0 + kA^2/2$ --- $E_m = kA^2/2$ = constante
No ponto médio 0, onde o módulo de v é máximo e x = 0, temos que --- $E_m = E_c + E_p$ --- $E_m = mv^2/2 + 0$ --- $E_m = mv^2_{max}/2$ = const.
Gráficos das energias cinética, potencial gravitacional e mecânica para um corpo de massa m, quando lançado verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, tomada como referencial e desprezando-se as forças resistivas.



$$t_{médio} = \frac{t_{inicial} + t_{final}}{2}$$

Durante todo o movimento, conclui-se que, à diminuição de energia cinética corresponde um aumento de energia potencial gravitacional e vice-versa, mantendo-se constante a totalidade da energia mecânica:

Observe que as representações gráficas das energias cinética e potencial gravitacional correspondem à duas parábolas invertidas de modo que, em cada ponto, a soma dessas duas energias corresponda à energia mecânica, que é constante. Observe também que o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

SISTEMAS DISSIPATIVOS

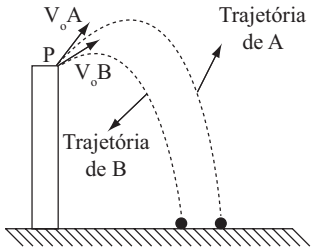
Sistemas dissipativos – surgem quando o trabalho é realizado por forças dissipativas (força de atrito, força de resistência do ar, etc) no qual, parte da energia mecânica do sistema é dissipada nas formas de energia térmica, sonora, etc. Assim a energia mecânica do sistema, diminui.

O QUE VOCÊ DEVE SABER

Em todo sistema dissipativo, o trabalho das forças não conservativas (força de atrito, força de resistência do ar etc.) é igual à energia total dissipada, ou seja, é igual à variação da energia mecânica – $E_{mfinal} – E_{minicial} = W_{forças\ dissipativas}$

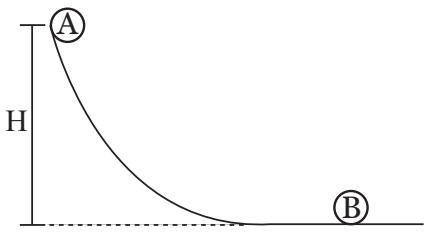
Exercícios de Fixação

1. (AFA) Duas esferinhas A e B, de massas 2 m e m, respectivamente, são lançadas com a mesma energia cinética do ponto P e seguem as trajetórias indicadas na figura abaixo.



Sendo a aceleração da gravidade local constante e a resistência do ar desprezível, é correto afirmar que a razão $\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$ entre as velocidades das esferinhas A e B imediatamente antes de atingir o solo é:
A) igual a 1.
B) maior que 1.
C) menor que 1.
D) maior que 2.

2. (AFA) De acordo com a figura abaixo, a partícula A, ao ser abandonada de uma altura H, desce a rampa sem atritos ou resistência do ar até sofrer uma colisão, perfeitamente elástica, com a partícula B que possui o dobro da massa de A e que se encontra inicialmente em repouso. Após essa colisão, B entra em movimento e A retorna, subindo a rampa e atingindo uma altura igual a:



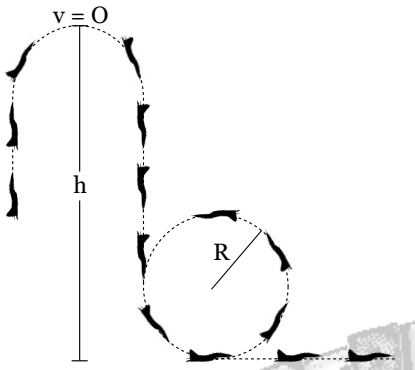
A) H

B) $\frac{H}{2}$

C) $\frac{H}{3}$

D) $\frac{H}{9}$

3. (AFA) Durante uma manobra, ao atingir velocidade nula, um avião desliga o motor e após queda livre realiza um *looping*, conforme indica a figura.

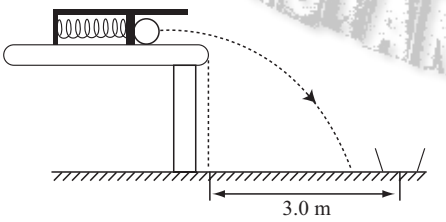


Desprezando-se a resistência com o ar e considerando-se a trajetória do *looping* circular de raio R, a menor altura **h** para que o avião consiga efetuar esse *looping* é:

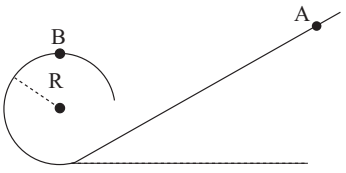
A) 1,5 R
B) 2,0 R
C) 2,5 R
D) 3,0 R

4. (AFA) Duas crianças estão brincando de atirar bolas de gude dentro de uma caixa no chão. Elas usam um brinquedo que lança as bolas pela descompressão de uma mola que é colocada horizontalmente sobre uma mesa onde o atrito é desprezível. A primeira criança comprime a mola 2 cm e a bola cai a 1,0 m antes do alvo, que está a 3,0 m horizontalmente da borda da mesa. A deformação da mola imposta pela segunda criança, de modo que a bola atinja o alvo é:

A) 1,7 cm
B) 2,0 cm
C) 3,0 cm
D) 9,0 cm



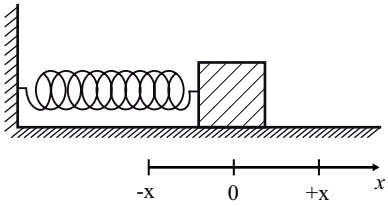
5. (AFA) A figura representa uma pista pertencente ao plano vertical. O raio R da parte circular vale 4 m. Um corpo parte do repouso no ponto A. Desprezando o atrito e a resistência do ar e considerando que, em B, a força que comprime o móvel contra a pista vale 1/4 do seu peso, pode-se afirmar que, a sua velocidade em B vale, em m/s, aproximadamente:



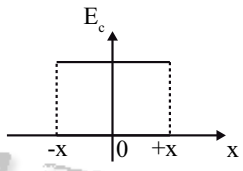
A) 3,2
B) 7,1
C) 5,5
D) 6,3

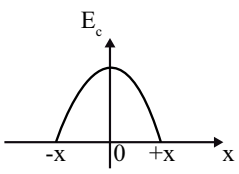
Exercícios Propostos

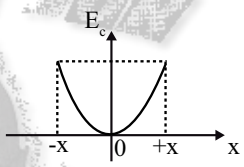
1. (AFA) Um bloco ligado a uma mola presa a uma parede oscila em torno de O, sobre uma superfície sem atrito, como mostra a figura.

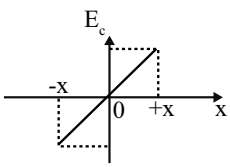


O gráfico que melhor representa a energia cinética E_c em função de **x** é:

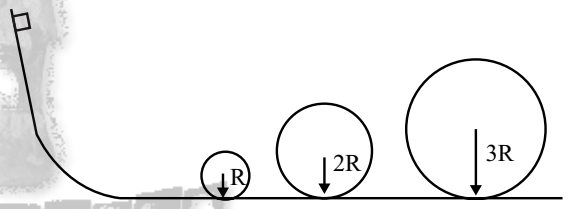
A)


C)


B)


D)


2. (AFA) Uma partícula é abandonada de uma determinada altura e percorre o trilho esquematizado na figura abaixo, sem perder contato com ele.



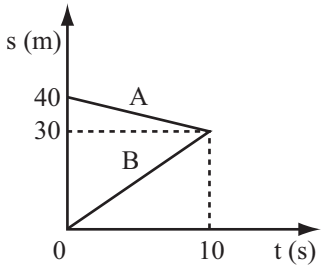
Considere que não há atrito entre a partícula e o trilho, que a resistência do ar seja desprezível e que a aceleração da gravidade seja g. Nessas condições, a menor velocidade possível da partícula ao terminar de executar o terceiro *looping* é:

A) $\sqrt{3Rg}$
B) $\sqrt{7Rg}$
C) $\sqrt{15Rg}$
D) $\sqrt{11Rg}$

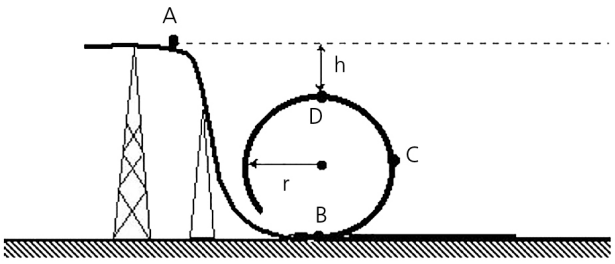
3. (AFA) Dois carrinhos A e B, de massa 2 kg cada, movem-se sobre trilhos retilíneos horizontais e sem atrito. Eles se chocam e passam a se mover grudados. O gráfico representa a posição de cada carrinho em função do tempo, até o instante da colisão.

A energia dissipada com o choque, em joules, é igual a:

A) 8
B) 32
C) 0
D) 40



4. Uma partícula de massa m é abandonada do repouso a partir do ponto A de uma pista ABCD conforme o desenho abaixo. O ponto A encontra-se a uma altura h acima do topo D da circunferência de raio r descrita pela pista.

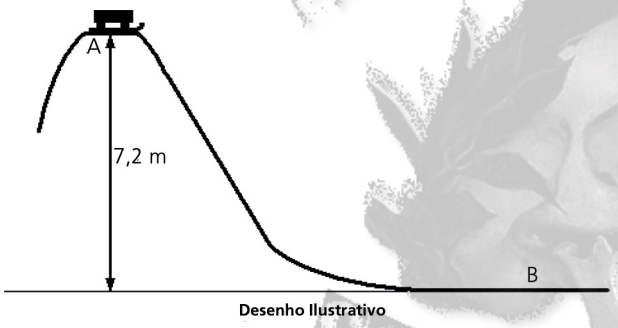


Desenho fora de escala

Desprezando todas as forças dissipativas, a altura mínima **h**, a partir de qual partícula deve ser abandonada para que, ao passar pelo ponto D, tenha a resultante centrípeta igual a seu próprio peso vale:

A) $\frac{r}{2}$
B) $\frac{2r}{3}$
C) r
D) $\frac{3r}{2}$
E) $r\sqrt{2}$

5. Um trenó, de massa M, desce uma montanha partindo do ponto A, com velocidade inicial igual a zero, conforme desenho abaixo.



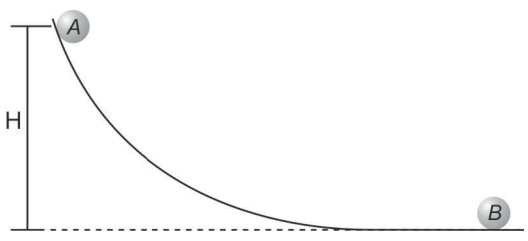
Desenho Ilustrativo

Desprezando-se todos os atritos e considerando a aceleração da gravidade igual a 10 m/s², quando o trenó atingir o ponto B, que se encontra 7,2 m abaixo do ponto A, sua velocidade será de

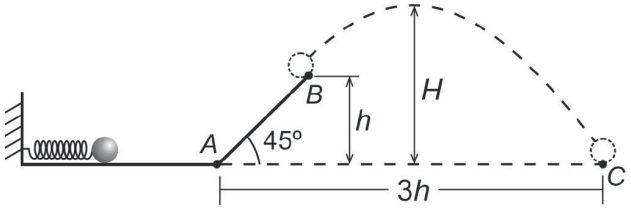
A) 6 m/s
B) $6\sqrt{2}$ m/s
C) 12 m/s
D) $12\sqrt{2}$ m/s
E) 144 m/s

6. (AFA) De acordo com a figura abaixo, a partícula A, ao ser abandonada de uma altura H, desce a rampa sem atritos ou resistência do ar até sofrer uma colisão, perfeitamente elástica, com a partícula B que possui o dobro da massa de A e que se encontra inicialmente em repouso. Após essa colisão, B entra em movimento e A retorna, subindo a rampa e atingindo uma altura igual a

A) H
B) $\frac{H}{2}$
C) $\frac{H}{3}$
D) $\frac{H}{9}$



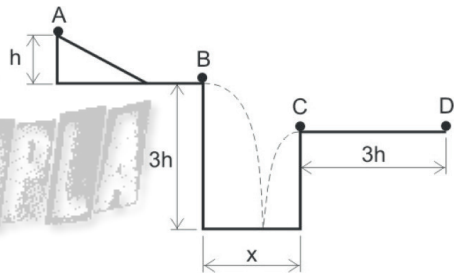
7. (AFA) Uma pequena esfera de massa m é mantida comprimindo uma mola ideal de constante elástica k de tal forma que a sua deformação vale x. Ao ser disparada, essa esfera percorre a superfície horizontal até passar pelo ponto A subindo por um plano inclinado de 45° e, ao final dele, no ponto B, é lançada, atingindo uma altura máxima H e caindo no ponto C distante 3h do ponto A, conforme figura abaixo.



Considerando a aceleração da gravidade igual a g e desprezando quaisquer formas de atrito, pode-se afirmar que a deformação **x** é dada por

A) $\left(\frac{3}{5}\frac{mgh}{k}\right)^{1/2}$
B) $2\frac{h^2k}{mg}$
C) $\left(\frac{5}{2}\frac{mgH}{k}\right)^{1/2}$
D) $\left(3\frac{H^2k}{mg}\right)^{1/2}$

8. (AFA) Uma partícula é abandonada sobre um plano inclinado, a partir do repouso no ponto A, de altura h, como indicado pela figura (fora de escala). Após descer o plano inclinado, a partícula se move horizontalmente até atingir o ponto B. As forças de resistência ao movimento de A até B são desprezíveis. A partir do ponto B, a partícula então cai, livre da ação de resistência do ar, em um poço de profundidade igual a 3h e diâmetro **x**. Ela colide com o chão do fundo do poço e sobe, em uma nova trajetória parabólica até atingir o ponto C, o mais alto dessa nova trajetória. Na colisão com o fundo do poço a partícula perde 50% de sua energia mecânica. Finalmente, do ponto C ao ponto D, a partícula move-se horizontalmente experimentando atrito com a superfície. Após percorrer a distância entre C e D, igual a 3h, a partícula atinge o repouso.



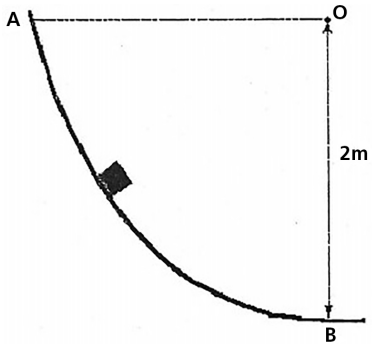
Considerando que os pontos B e C estão na borda do poço, que o coeficiente de atrito dinâmico entre a partícula e o trecho $\overline{CD}$ é igual a 0,5 e que durante a colisão com o fundo do poço a partícula não desliza, a razão entre o diâmetro do poço e a altura de onde foi abandonada a partícula, $\frac{x}{h}$, vale

A) 1
B) 3
C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$

9. (EFOMM/2008) Em um carregamento (carga geral), o cabo que sustenta uma lingada com 16 fardos de algodão prensado, de 40 kg cada um, em repouso, rompe a 24,0 m de altura do convés principal. A energia cinética (em joules), quando do impacto da carga no convés é (supor g = 10 m/s²), aproximadamente,

A) $1{,}54 \times 10^5$
B) $1{,}64 \times 10^5$
C) $1{,}71 \times 10^5$
D) $1{,}83 \times 10^5$
E) $1{,}97 \times 10^5$

10. (EFOMM/2010) Observe a figura a seguir.



Na figura acima o bloco de massa 30 kg, que é abandonado do ponto A com velocidade zero, desliza sobre a pista AB. Considere que ao longo do percurso a força de atrito entre o bloco e a pista dissipa 60J de energia. A velocidade do bloco no ponto B, em m/s, é

Dado: g = 10 m/s^2.

A) 6,0
B) 7,0
C) 8,0
D) 9,0
E) 10,0

Aula 13: Energia				
1	**2**	**3**	**4**	**5**
C	D	C	C	B

Aula 13: Energia				
1	**2**	**3**	**4**	**5**
C	C	A	A	C
6	**7**	**8**	**9**	**10**
D	C	C	A	A

Anotações

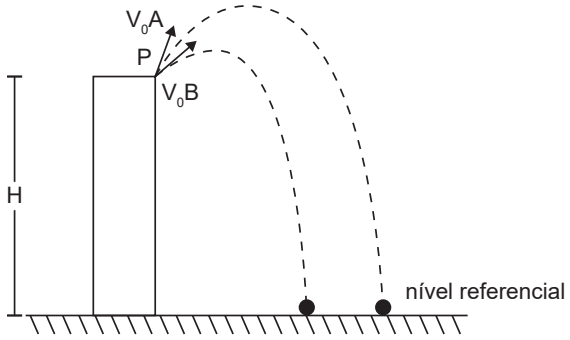
037.498 - 15644621 – **Digitador(a).:** Claudia – **Revisora.:** Kelly Moura

Resoluções

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01.

i) Adotando o solo como nível referencial (região do espaço aonde a energia potencial gravitacional equivale a zero), podemos encontrar o valor da energia mecânica dos corpos A e B no ponto P.



Energia mecânica A = (2m)gH + Energia cinética

Energia mecânica B = (m)gH + Energia cinética

ii) A resistência de ar é desprezível, ou seja, não há forças para dissipar a energia mecânica dos corpos A e B, logo a energia mecânica dos corpos é conservada durante todo o trajeto deles. Portanto, podemos dizer que a energia mecânica dos corpos no ponto P é igual à energia mecânica deles no solo.

- Energia mecânica A = (2m)gH + Energia cinética =

$$= \frac{(2m)V_A^2}{2} \rightarrow \boxed{V_A = \sqrt{2gH + \frac{\text{Energia cinética}}{m}}}$$

- Energia mecânica B = mgH + Energia cinética =

$$= \frac{(m)V_B^2}{2} \rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{2gH + \frac{2(\text{Energia cinética})}{m}}}$$

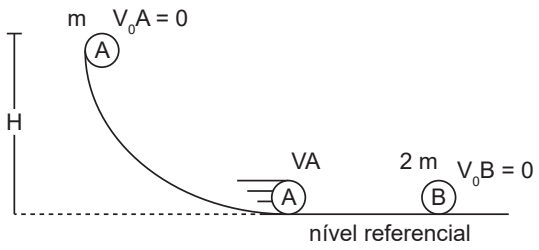
iii) Observe que vB > vA. logo temos que:

$$v_B > v_A \rightarrow \frac{v_B}{v_B} = \frac{v_A}{v_B} \rightarrow \boxed{1 > \frac{v_A}{v_B}}$$

Resposta: C

02.

i) Adotando o solo como nível referencial, podemos encontrar o valor do módulo da velocidade da particula A, por meio da conservação de energia, antes dela, colidir com a particula:

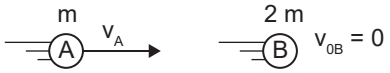


$$mgH + \frac{m(v_{0A})^2}{2} = mg(0) + \frac{m(v_A)^2}{2}$$

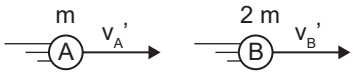
$$mgH + 0 = 0 + \frac{m(v_A)^2}{2} \Rightarrow \cancel{m}gH + \frac{\cancel{m}(v_A)^2}{2} = \boxed{v_A = \sqrt{2gH}}$$

ii) Utilizando o conservação da quantidade de movimento e o coeficiente de restituição igual a 1 (colisão perfeitamente elástica), podemos calcular o valor da velocidade da partícula A após a colisão.

- Antes da colisão:



- Após da colisão:



iii)

$$\begin{cases} mv_A + (2m)\cdot 0 = mv_A' + 2m\cdot v_B' \\ \dfrac{v_B' - v_A'}{v_A - v_{oB}} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{m}v_A = \cancel{m}v_A' + 2\cancel{m}v_B' \\ v_A - v_{oB} = v_B' - v_A' \end{cases} \Rightarrow$$

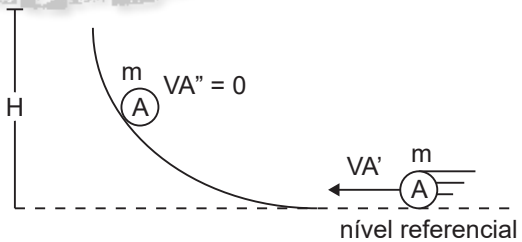
$$= 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A = v_A' + 2v_B' \\ v_A = v_B' + v_A' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_A = v_A' + 2v_B' \\ 2v_A = 2v_B' - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_A = -v_A' + 2v_B' \\ 2v_A = 2v_B' - 2v_A' \end{cases} \Big\rangle\ v_A = -3v_A' \Rightarrow \boxed{v_A' = \frac{-\sqrt{2gH}}{3}}$$

O sinal negativo no valor de v_A' é para indicar que a partícula está se locomovendo no sentido contrário em relação ao sentido que foi suposto, ou seja, eu supus que a partícula A iria andar no sentido da esquerda para a direita após a colisão, mas o sinal negativa em V_A' indica que, na realidade, ela irá andar no sentido da direita para a esquerda após a colisão, ou seja, ela estará contrária ao que eu supus.

iv) Após a colisão, é possível conservar a energia mecânica da partícula A e encontrar o valor da altura que ela atinge subindo a rampa.



$$\frac{\cancel{m}(v_A')^2}{2} + \cancel{m}g(0) = \frac{\cancel{m}(v_A'')^2}{2} + \cancel{m}gh$$

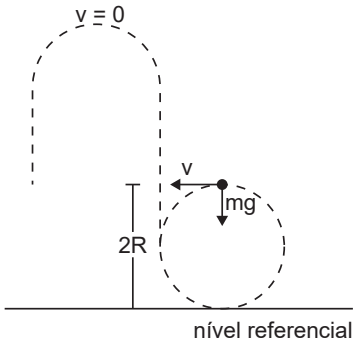
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2gH}}{3}\right)^2 + 0 = \frac{(0)^2}{2} + gh \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}gH}{9} = \cancel{g}h \Rightarrow \boxed{h = \frac{H}{9}}$$

Obs.: Para uma melhor compreensão de colisão e quantidade de movimento, recomendo uma leitura nas aulas 17, 18 e 19 (Impulso e Quantidade de movimento).

Resposta: D

03.

i) A resistência do ar é desprezível, logo não há forças dissipativas atuando no avião, ou seja, a energia mecânica é conservada durante toda a trajetória dele. Baseado nisso, podemos dizer que a energia mecânica do avião no ponto mais alto da manobra é igual a energia mecânica do avião no ponto mais alto do looping. Logo, temos que:



$$\boxed{mgh = mg(2R) + \frac{mv^2}{2}} \ (1)$$

ii) Para que o avião consiga realizar a curva, é necessário que haja uma resultante centrípeta atuando nele. Baseado nisso, observe que a única força atuando no avião é o peso, logo ele exerce o papel de resultante centrípeta.

$$F_{centrípeta} = P \rightarrow \frac{mv^2}{R} = mg \rightarrow \boxed{mv^2 = mgR} \ (2)$$

iii) Substituindo a expressão (2) em (1)

$$mgh = mg(2R) + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow mgh = mg(2R) + \frac{\boxed{mgR}}{2} = mv^2$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\,\cancel{g}h = \cancel{m}\,\cancel{g}(2R) + \cancel{m}\,\cancel{g}(0{,}5)R \Rightarrow \boxed{h = 2{,}5R}$$

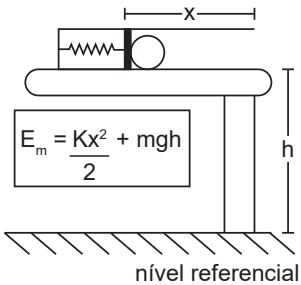
Resposta: C

04.

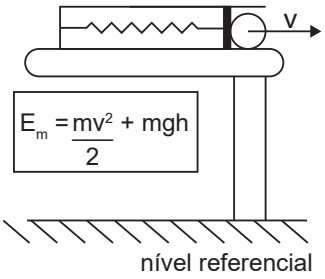
i) Adotando o solo como nível referencial, vemos que a energia mecânica na bola de gude, antes dela ser liberada, é $\boxed{E_m = \frac{kx^2}{2} + mgh}$. Aonde $\frac{kx^2}{2}$ é a energia elástica fornecida pela mola, mgh é a energia potencial gravitacional é **h** é o valor da altura da mesa.

ii) **Não há forças dissipativas** atuando na bola de gude, logo **a energia mecânica dela é consecutiva**. Baseado nisso, podemos dizer que **a energia mecânica** da bola de gude **antes dela ser liberada e no momento em que a mola não está mais contraída são iguais**, logo:

- Antes de ser liberada:



- Mola não está mais deformada:



iii) Baseado no passo (ii), temos que ou seja, $E_m = \frac{kx^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + mgh$, ou seja, $\boxed{\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}}$. Portanto, é possível concluir que toda a energia potencial elástica da mola é concentrada em energia cinética, aonde **v** é a velocidade horizontal da bola de gude.

iv) Observe que na horizontal não há aceleração atuando na bola de gude, ou seja, nesse eixo o movimento dela é uniforme. Baseado nisso, temos que:

$$S = vt \Rightarrow \frac{kx^2}{\cancel{2}} = \frac{m}{\cancel{2}}\left(\frac{S}{t}\right)^2 \rightarrow \boxed{(kt)x^2 = m(S)^2}$$

- S é a distância horizontal entre a mesa e a partícula.
- t é o tempo de movimento.

v) Observe que o tempo de movimento (t) é o tempo de queda da bola de gude, pois quando ela atinge o solo, não há mais movimento. Baseado nisso, perceba que, nos dois lançamentos da bola de gude, ela cai da mesma altura **h**, portanto concluímos que **t** é o mesmo nos dois casos.

vi)

- No 1º lançamento: $\boxed{(kt)\cdot(2\text{ cm})^2 = m\cdot(2\text{ metros})^2}$ (1)
- No 2º lançamento: $\boxed{(kt)\cdot(x)^2 = m\cdot(3\text{ metros})^2}$ (2)

vii) Dividindo a expressão (2) pela expressão (1):

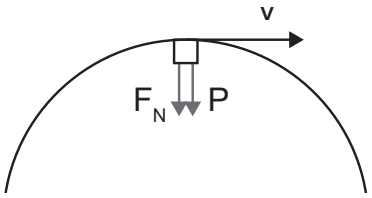
$$\frac{\cancel{(kt)}\cdot(x)^2}{\cancel{(kt)}\cdot(2\text{ cm})^2} = \frac{\cancel{m}\cdot(3\text{ metros})^2}{\cancel{m}\cdot(3\text{ metros})^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{2\text{ cm}}\right)^2 = \left(\frac{3\ \cancel{\text{metros}}}{2\ \cancel{\text{metros}}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2\text{ cm}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{\cancel{2}\text{ cm}} = \frac{3}{\cancel{2}} \Rightarrow \frac{x}{1\text{ cm}} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 3\text{ cm}}$$

Resposta: C

05.

i) Para que o corpo consiga realizar a curva na pista, é necessário que haja uma resultante centrípeta atuando nele. Baseado nisso e analisando o ponto B, temos que:



$$\boxed{FN + P = \frac{mv^2}{R}} \quad (1)$$

ii) O enunciado diz "a força que comprime o móvel contra a pista vale 1/4 do seu peso", ou seja, ele está se referindo à força de interação entre a pista e o corpo (FN).

Logo: $\boxed{FN = \left(\frac{1}{4}\right)\cdot P}$

iii) Substituindo o valor de FN na expressão (1), temos:

$$FN + P = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)P + P = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \frac{5}{4}P = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = mg \Rightarrow \frac{5}{4}\cancel{m}g = \frac{\cancel{m}v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{5}{4}Rg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{5}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\cdot 10 \Rightarrow v = \sqrt{50}\ m/s \Rightarrow \boxed{v \approx 7{,}1\ m/s}$$

Resposta: B

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01.

i) Observe que, de acordo com o enunciado, o bloco pode ser deslocado para as posições ±x, aonde ele é liberado para iniciar o movimento dele. Baseado nisso, concluímos que a energia mecânica (E_m) do bloco nessas posições é $\boxed{E_M = \frac{kx^2}{2}}$.

ii) Não há forças dissipativas atuando no bloco, logo é possível concluir que a energia mecânica dele é conservada e ela é a mesma em qualquer parte do trajeto.

iii) Para uma posição qualquer do trajeto, temos que:

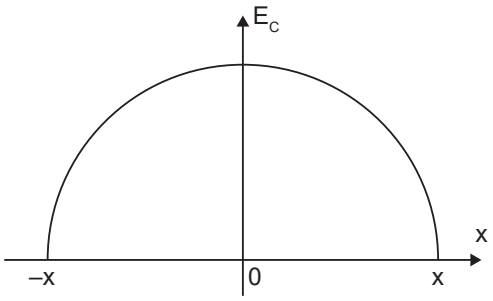
$$\boxed{E_M = \frac{kx^2}{2} = \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{E_C}}.$$

iv) Baseado no passo, temos:

$$E_M = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + E_C \rightarrow \boxed{E_C = -\frac{kx^2}{2} + \frac{kX^2}{2}}$$

Equação de parabóla com concavidade para baixo

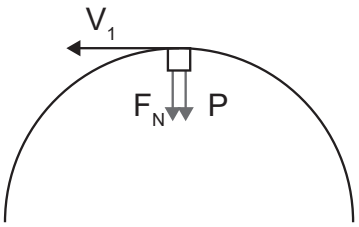
v) Baseado no passo (iv), temos o seguinte gráfico:



Resposta: C

02.

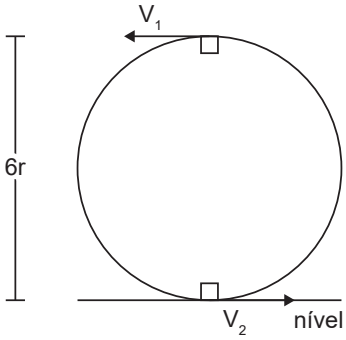
i) Quando a partícula está no topo do terceiro looping:



$$FN + P = \frac{mv_1^2}{(3R)} \rightarrow mv_1^2 = (3R)FN + (3R)\cdot P$$

$$\rightarrow P = mg \rightarrow \boxed{mv_1^2 = (3R)FN + mg(3R)} \quad (1)$$

ii) Quando a partícula está terminando de executar o terceiro looping, podemos encontrar a velocidade dela por meio da conservação da energia.



$$\frac{mv_1^2}{2} + mg(6R) = \frac{mv_1^2}{2} \xrightarrow{(1)}$$

$$\frac{(3R)FN + mg(3R)}{2} + mg(6R) = \frac{mv_2^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{(3R)FN + mg(15R)}{2} = \frac{mv_2^2}{2}}$$

iii) Para que v_2 tenha o menor valor possível, é necessário que o valor de FN tenda a zero, pois, dessa maneira, apenas a força peso irá exercer o papel de resultante centrípeta e isso irá diminuir o valor de v_2. Logo:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mg(15R) + (3R)FN}{2} \rightarrow FN = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{m}v_2^2}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{m}g(15R)}{\cancel{2}} \rightarrow \boxed{v^2 = \sqrt{15Rg}}$$

Resposta: C

03.

i) Utilizando os valores fornecidos pelo gráfico no enunciado e a função horário do espaço, é possível encontrar os valores dos módulos das velocidades dos corpos A e B.

• $S_A = S_{0A} + V_{0A} \cdot t \rightarrow 30 = 40 + V_{0A} \cdot 10 \rightarrow \boxed{V_{0A} = -1\ m/s}$

Sinal negativo indica que o corpo A está contra o sentido adotado no movimento.

• $S_B = S_{0B} + V_{0B} \cdot t \rightarrow 30 = 0 + V_{0B} \cdot 10 \rightarrow \boxed{V_{0B} = 3\ m/s}$

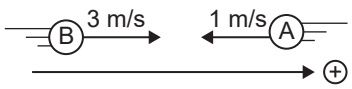
ii) Antes da colisão, a energia mecânica inicial do sistema é:

$$E_{M0} = \frac{m_A (v_{0A})^2}{2} + \frac{m_B (v_{0B})^2}{2} \rightarrow E_{M0} = \frac{2 \cdot (1)^2}{2} + \frac{2 \cdot (3)^2}{2} \rightarrow$$

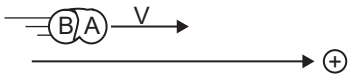
$$\rightarrow \boxed{E_{M0} = 10\ J}$$

iii) Na colisão, temos:

• Antes da colisão:



• Após da colisão:



Conservando a quantidade de movimento:

$m_B v_B + m_A v_A = (m_B v_A) \cdot v \rightarrow 2 \cdot (3) + 2 \cdot (-1) = (2+2) \cdot v \rightarrow$

$6 - 2 = 4 \cdot v \rightarrow \boxed{v = 1\ m/s}$

iv) Energia mecânica do sistema após a colisão (E_{mf})

$$E_{mf} = \frac{(m_B + m_A) \cdot v^2}{2} \rightarrow E_{mf} = \frac{(2+2) \cdot (1)}{2} \rightarrow \boxed{E_{mf} = 2\ J}$$

v) A energia dissipada é obtida através da variação de energia mecânica do sistema, logo:

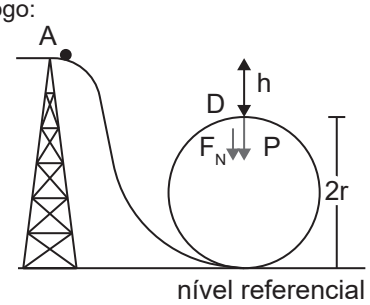
$E_{diss} = E_{mf} - E_{m0} \rightarrow E_{diss} = 2J - 10J \rightarrow \boxed{E_{diss} = -8J}$

O sinal negativo indica que a energia foi perdida pelo sistema.

Resposta: A

04.

i) Não há forças dissipativas atuando na partícula, logo a energia mecânica dela é conservada durante todo o trajeto. Baseado nisso, podemos dizer que a energia mecânica da partícula no ponto A é igual à energia mecânica dela no ponto D. Logo:



$$E_{MA} = E_{MD} \rightarrow mg(2r + h) = mg(2r) + \frac{mv_D^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{mg(2r)} + mgh = \cancel{mg(2r)} + \frac{mv_D^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{mv_D^2}{2} = mgh \rightarrow \boxed{mv_D^2 = 2mgh}\ (1)$$

ii) No ponto D, temos:

$$FN + P = \frac{mv_D^2}{r} \rightarrow FN = 0$$

(Condição para que a resultante centrípeta seja igual ao peso)

$$P = \frac{mv_D^2}{r} \rightarrow P = mg \rightarrow \boxed{mg = \frac{mv_D^2}{r}}\ (2)$$

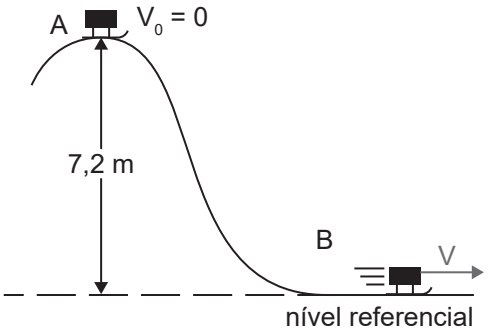
iii) Substituindo a expressão (1) na expressão (2):

$$mg = \frac{mv_D^2}{r} \rightarrow \cancel{m}\,g = \frac{2\cancel{m}\,gh}{r} \rightarrow \boxed{h = \frac{r}{2}}$$

Resposta: A

05.

i) Adotando o solo como nível referencial, podemos encontrar o valor da velocidade do trenó no ponto B por meio da conservação de energia, logo:



ii)

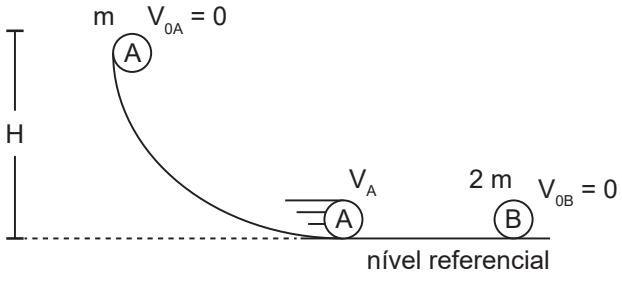
$$E_{MA} = E_{MB} \rightarrow \cancel{m}g(7,2) = \frac{\cancel{m}v^2}{2} \rightarrow v^2 = 2 \cdot 10 \cdot 7,2 \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = 144 \rightarrow \boxed{v = 12\ m/s}$$

Resposta: C

06.

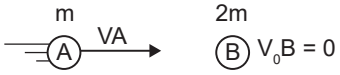
i) Adotando o solo como nível referencial, podemos encontrar o valor do módulo da velocidade da partícula A, por meio da conservação de energia, antes dela colidir com a partícula B.



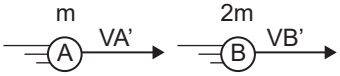
$$mgH+\frac{m(v_{0A})^2}{2}=mg(0)+\frac{m(v_A)^2}{2}\rightarrow$$
$$\rightarrow mgH+0=0+\frac{m(v_A)^2}{2}\rightarrow$$
$$\rightarrow mgH=\frac{m(v_A)^2}{2}\rightarrow \boxed{v_A=\sqrt{2gH}}$$

ii) Utilizando a conservação da quantidade de movimento e o coeficiente de restituição igual a 1 (colisão perfeitamente elástica), podemos calcular o valor da velocidade da partícula A após a colisão.

• Antes da colisão:



• Após a colisão:



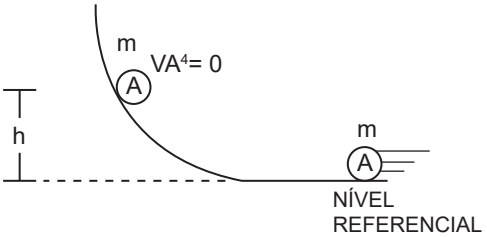
iii)
$$\begin{cases} mv_A+|2m|\cdot 0=mv_A'+2mv_B' \\ \dfrac{v_B'+v_A'}{v_A-v_{0B}}=1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} mv_A=mv_A'+2mv_B' \\ v_A-\underset{0}{v_{0B}}=v_B'-v_A' \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A=v_A'+2v_B' \\ v_A=v_B'-v_A' \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} v_A=v_A'+2v_B' \\ 2v_A=2v_B'-2v_A' \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_A=-v_A'-2v_B' \\ 2v_A=2v_B'-2v_A' \end{cases}\Big\rangle\ v_A=-3v_A'\Rightarrow \boxed{v_A'=-\frac{\sqrt{2gH}}{3}}$$

O sinal negativo no valor de v_A' é para indicar que a partícula está se locomovendo no sentido contrário em relação ao sentido que foi suposto, ou seja, eu supus que a partícula A iria andar no sentido da esquerda para a direita após a colisão, mas o sinal negativo em v_A' indica que, na realidade, ela irá andar no sentido da direita para a esquerda após a colisão, ou seja, ela estará contrária ou que eu supus.

iv) Após a colisão, é possível conservar a energia mecânica da partícula A e encontrar o valor da altura que ela atinge subindo a rampa.

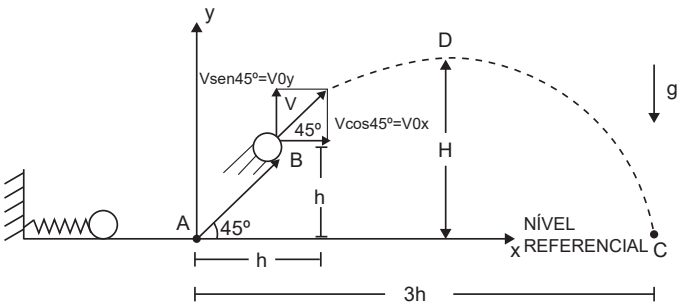


$$\frac{m(v_A')^2}{2}+mg(0)=\frac{m(v_A')^2}{2}+mgh\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2gH}}{3}\right)^2+0=\frac{(0)^2}{2}+gh\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{2gH}{9}=gh\Rightarrow \boxed{h=\frac{H}{9}}$$

Resposta: D

07.

i) Adotando um par de eixos coordenados no ponto A, temos a seguinte situação:



ii) Utilizando a função horário do espaço, podemos determinar as equações de movimento da bola no eixo X e no eixo Y, logo, temos:

$$\begin{cases} X: S_X=S_{0Y}+V_{0X}\cdot t \\ Y: S_Y=S_{0Y}+V_{0Y}\cdot t+\dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X: S_X=h+(V\cdot\cos 45°)\cdot t \quad (1) \\ Y: S_Y=h+(V\cdot\cos 45°)\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 \quad (2) \end{cases}$$

iii) Utilizando a expressão (1), podemos encontrar o valor de **t** quando a esfera atinge a distância 3h, logo:

$$S_X=h+(V\cdot\cos 45°)\cdot t\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3h=h+\left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right)\cdot t\Rightarrow\left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right)\cdot t=2h\Rightarrow \boxed{t=2\sqrt{2}\frac{h}{v}}$$

iv) Substituindo o valor de **t** na expressão (2), podemos encontrar o valor de **v** em função de **h**.

$$S_Y=h+(v\cdot sen\,45°)\cdot t-\frac{1}{2}gt^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0=h+\left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{h}{v}-\frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{v}h\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0=h+2h-\frac{1}{2}g\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{h^2}{v^2}\Rightarrow 3h=\frac{4gh^2}{v^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{v^2=\frac{4}{3}gh}\ (3)$$

v) Utilizando a equação do Torricelli no eixo **y** do trajeto de B até D e a expressão (3), podemos encontrar o valor de **h** em função de H.

$$v_y^2=v_{oy}^2+2a\Delta S\Rightarrow(0)^2=(v\cdot sen45°)^2+2(-g)(H-h)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0=\left(\frac{v\sqrt{2}}{2}\right)^2-2g(H-h)\Rightarrow 0=v^2\cdot\frac{2}{4}-2g(H-h)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow v^2\cdot\frac{2}{4}=2g(H-h)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow v^2=4g(H-h)\xrightarrow{(3)}\frac{4}{3}gh=4g(H-h)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{h}{3}=H-h\Rightarrow\frac{h}{3}=H-\frac{3}{3}h\Rightarrow\frac{4h}{3}=H\Rightarrow \boxed{h=\frac{3}{4}H}\ (4)$$

vi) Observe que não há forças dissipativas atuando na esfera, logo a energia dela é conservada durante todo o trajeto. Portanto, baseado nisso, podemos dizer que a energia mecânica dela antes de ser disparada é a mesma energia mecânica que ela possui no ponto B, logo:

$$\frac{kx^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+mgh \xrightarrow{(3)} \frac{kx^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\frac{4}{3}gh\right)+mgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{kx^2}{2}=\frac{4}{6}mgh+\frac{6}{6}mgh \Rightarrow \frac{kx^2}{2}=\frac{10}{6}mgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\left(\frac{10}{3}\frac{mgh}{k}\right)^{1/2}} \quad (5)$$

vii) Observe que não há alternativa para o valor de **x** encontrado no passo (vi), portanto, vamos substituir a expressão (4) em (5) para encontrarmos o valor de **x** em função de H:

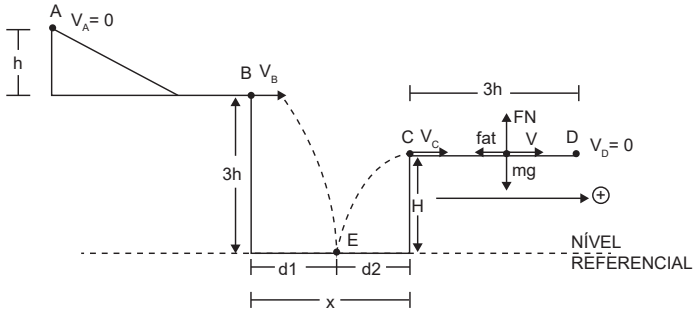
$$x=\left(\frac{10}{3}\frac{mgh}{k}\right)^{1/2} \xrightarrow{(4)} x=\left(\frac{10}{\cancel{3}}\frac{mg}{k}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}H\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\left(\frac{10}{4}\frac{mgH}{k}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{x=\left(\frac{5}{2}\frac{mgH}{k}\right)^{1/2}}$$

Resposta: C

08.

i)



ii) A energia mecânica da partícula é conservada do ponto A até o ponto B, pois, nesse trajeto, não há forças dissipativas atuando na partícula. Baseado nisso, podemos encontrar o valor de v_B por meio da conservação de energia, logo:

$$E_{MA}=E_{MB} \Rightarrow mg(h+3h)+\frac{mv_A^2}{2}=mg(3h)+\frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh+\cancel{mg(3h)}+\frac{m(0)^2}{2}=\cancel{mg(3h)}+\frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh+0=\frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow \cancel{m}gh=\frac{\cancel{m}v_B^2}{2} \Rightarrow v_B^2=2gh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_B=\sqrt{2gh}}$$

iii) Do ponto B até o ponto E, no eixo horizontal, a velocidade v_B é constante, pois não há aceleração atuando na partícula nessa direção. Observe que, o tempo que a partícula leva para cair da altura 3h, é o mesmo tempo para percorrer a distância d_1. Portanto, baseado nesses fatos, podemos encontrar o valor de d_1, logo:

- $S_y = S_0y + V_0y\cdot t+\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 0=3h+0\cdot t+\frac{1}{2}(-g)t^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0=3h-\frac{gt^2}{2} \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{\frac{6h}{g}}}$$

- $S_x = S_0x + V_0x\cdot t \Rightarrow d_1=0+v_B\cdot t \Rightarrow d_1=\sqrt{2\cancel{g}h}\cdot\sqrt{\frac{64}{\cancel{g}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{d_1=\left(2\sqrt{3}\right)h}$$

iv) Utilizando o teorema do trabalho no trajeto do ponto C até o ponto D, podemos encontrar o valor de v_C.

$$\tau=\Delta E_{cinética} \Rightarrow fat\cdot d\cdot\cos\theta=\frac{mv_A^2}{2}-\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow fat\cdot\mu\cdot FN \Rightarrow \underbrace{\theta=180°}$$

A força de atrito está contra a trajetória

$$\Rightarrow \mu FN\cdot d\cdot\cos180°=\frac{mv_D^2}{2}-\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos180°=-1\\ V_D=0\end{cases} \Rightarrow \mu FN\cdot d\cdot(-1)=\frac{m(0)^2}{2}-\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\mu=0{,}5\\ FN=mg \Rightarrow 0{,}5\cdot mg\cdot(3h)\cdot(-1)=0-\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow\\ d=3h\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{m}gh=\frac{\cancel{m}v_C^2}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{V_C=\sqrt{3gh}}$$

v) Após colidir no ponto E, a partícula perde metade da sua sua energia mecânica, portanto, a energia da partícula na trajetória EC equivale à metade da energia mecânica da trajetória BE, logo temos que:

$$\text{Em BE}\cdot\frac{1}{2}=\text{Em EC} \Rightarrow \frac{1}{2}\left[mg(3h)+m\frac{v_A^2}{2}\right]=mgH+\frac{mv_C^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g(3h)+\frac{\cancel{m}v_B^2}{2}=2\cancel{m}gH+\cancel{2}\frac{\cancel{m}v_C^2}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{3g}h+\frac{2gh}{2}=2gh+\cancel{3g}h \Rightarrow \boxed{H=\frac{h}{2}}$$

vi) Baseado no passo (iii), temos:

- $S_y = S_0y + V_0y\cdot t+\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 0=H+0\cdot t+\frac{1}{2}(-g)t^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{gt^2}{2}=H \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{\frac{h}{g}}}$$

O tempo de queda é igual ao tempo de subida no traje EC.

- $S_x = S_0x + V_0x\cdot t \Rightarrow d_2=0+\sqrt{3\cancel{g}h}\cdot\sqrt{\frac{h}{\cancel{g}}} \Rightarrow \boxed{d_2=h\sqrt{3}}$

vii)

$$x=d_1+d_2 \Rightarrow x=\left(2\sqrt{3}\right)h+h\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\left(3\sqrt{3}\right)h} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{h}=3\sqrt{3}}$$

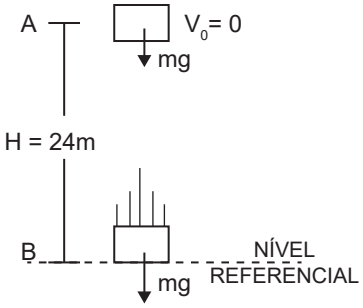
Resposta: C

09.

i) Cada fardo possui uma massa de 40 kg e o carregamento possui um total de 16 fardos. Baseado nisso, podemos calcular a massa total do carregamento e, consequentemente, o peso dele, logo:

- $\text{Massa} = \dfrac{40\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{fardo}}} \cdot 16\ \cancel{\text{fardo}} \Rightarrow \boxed{\text{Massa} = 640\ \text{kg}}$
- $\text{Peso} = mg \Rightarrow \text{Peso} = 640 \cdot 10 \Rightarrow \boxed{\text{Peso} = 6400\ \text{N}}$

ii) Adotando o solo como nível referencial, podemos encontrar o valor da energia cinética da carga no convés por meio da conservação de energia mecânica.



$$E_{MA} = E_{MB} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv^2}{2} + mg(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m(0)^2}{2} + mgH = \frac{mv^2}{2} + mg(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + mgH = \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{\substack{\text{Energia} \\ \text{Cinética } (E_C)}} + 0 \Rightarrow \boxed{E_C = mgH}$$

iii)

$E_C = mgH \Rightarrow E_C = 6400 \cdot 24 \Rightarrow E_C = 153600\ \text{J} \Rightarrow$

$E_C = 1{,}536 \cdot 10^5\ \text{J} \Rightarrow \boxed{E_C \approx 1{,}54 \cdot 10^5\ \text{J}}$

Valor aproximado da energia cinética da carga na hora do impacto no convés.

Resposta: A

10.

i) Adotando a linha horizontal em que o ponto B está localizado como nível referencial, podemos calcular o valor da energia mecânica do bloco no ponto A.

$$E_{MA} = mgh + \frac{m(v_A)^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} h = 2\ \text{m} \\ v_A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E_{MA} = 30 \cdot 10 \cdot 2 + \frac{30 \cdot (0)^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_{MA} = 600\ \text{J}}$$

ii) Durante o trajeto AB há dissipação de energia mecânica do bloco por causa da força de atrito. Baseado nisso, concluímos que a energia mecânica do bloco ao chegar no ponto B é a energia mecânica que ele tinha no ponto A menos a energia que foi perdida pela força de atrito, logo:

$E_{MB} = E_{MA} - 60\ \text{J} \Rightarrow E_{MB} = 600\ \text{J} - 60\ \text{J} \Rightarrow \boxed{E_{MB} = 540\ \text{J}}$

iii) Como o ponto B está no nível referencial, implica que toda a energia mecânica do bloco nesse ponto equivale à energia cinética, logo:

$$E_{MB} = \frac{mv_B^2}{2} \Rightarrow 540 = \frac{30 \cdot v_B^2}{2} \Rightarrow v_B^2 = 36 \Rightarrow \boxed{v_B = 6\ \text{m/s}}$$

Resposta: A

Anotações

045.749 - 16052622 – Digitador(a).: Georgenes – Revisora.: Alana Maria